



# Zastosowanie falek w przetwarzaniu obrazów

***dr inż. Paweł Forczmański***

*Katedra Systemów Multimedialnych, Wydział Informatyki ZUT*

Alfréd Haar (węg.: Haar Alfréd, ur. 11 października 1885 r. w Budapeszcie - zm. 16 marca 1933 r. w Szegedzie) – węgierski matematyk.

*Haar, A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, (Erste Mitteilung), Math. Ann. 69 (1910), 331–371 (at GDZ). (This is Haar's thesis, written under the supervision of David Hilbert.)*



Po ukończeniu sławnego Fasori Gimnázium, studiował od 1904 na Uniwersytecie w Getyndze i doktoryzował się w 1909 roku u Dawida Hilberta. Po kilku latach pracy jako asystent w Getyndze wrócił na Węgry, by rozpocząć pracę na Uniwersytecie w Kolozsvárze (obecnie Cluj-Napoca w Rumunii). Po pierwszej wojnie światowej przeniósł się na krótko do Budapesztu, a stamtąd do Szegedu.

Haar zajmował się głównie badaniem równań różniczkowych pochodnych cząstkowych, teorią aproksymacji Czebyszewa i teorią grup topologicznych. Nazwana jego imieniem miara Haara przenosi miarę Lebesgue'a na grupy lokalnie zwarte.

Falka Haara jest **pierwszą znaną falką**, została wprowadzona przez Alfréda Haara w 1909 lub 1910 r. Jest to szczególnie prosta falka.

**Do roku 1930** do analizy częstotliwości stosowane były wzory Fouriera. Wykazał on, że każda funkcja o okresie  $2\pi$  może być przedstawiona jako szereg

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Współczynniki  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ , wyznaczone są w następujący sposób:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$



1807	Fourier	Ortogonalna dekompozycja sygnału okresowego
1910	A. Haar	Alternatywna baza ortonormalna służąca do dekompozycji sygnału
1946	D. Gabor	Okienkowa transformata Fouriera
1965	Cooley Tuckey	Algorytm FFT (Fast Fourier Transform)
1976	C. Galand D. Esteban	Filtracja pasmowa (subband coding)
1976	Crochiere Zebber Flanagan	Kwadratowe filtry lustrzane (QMF)

1982	J. Morlet	Wprowadzenie pojęcia falek
1982	A. Grossman	Odwrotna transformata falkowa
1984	Morlet, Grossman	Badania matematyczne nad transformatą falkową i jej zastosowaniami
1985	Y. Meyer	Matematyczne podstawy teorii falek
1986	Daubechies Grossman Meyer	Konstrukcja rozwinięcia nieortogonalnego
1986	Meyer, Lemarie	Konstrukcja gładkiej ( $C^\infty$ ), ortonormalnej bazy falkowej na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$
1986	Meyer, Mallat	Ogólny formalizm umożliwiający konstrukcję ortogonalnej bazy falkowej

1988	Daubechies	Konstrukcja rodziny gładkich falek ortonormalnych o zwartym nośniku przy zastosowaniu filtrów FIR
		Związki pomiędzy ciągłą transformatą falkową a jej dyskretnymi odpowiednikami na $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}^n$
1989	Mallat	Algorytm dekompozycji i rekonstrukcji falkowej przy użyciu analizy wielorozdzielczej
1990	Alpert Rokhlin	Pierwsza konstrukcja multifalek
1992	Daubechies	Rodzina symetrycznych, ciągłych falek biortogonalnych o zwartym nośniku
1993	Newland	Harmoniczna transformata falkowa (HWT)

1994	Dahlke	Pierwsza konstrukcja falek sferycznych
1994	P. Schröder, W. Sweldens	Metoda konstrukcji falek sferycznych niezależna od parametryzacji
1996	G. Strang	Bardziej systematyczna teoria konstrukcji multifalek dających analizę wielorozdzielczą
1996	Foster	WWT (Weighted Wavelet Transform) Modyfikacja transformaty falkowej umożliwiająca analizę danych niekoniecznie równoodległych w czasie
2001	Daubechies, Guskov, Schröder, Sweldens	Falki jedno- i dwuwymiarowe określone na nieregularnych zbiorach punktów



**Fale:** funkcje oscylujące w czasie, w przestrzeni lub w obu tych dziedzinach.

Analiza Fouriera jest **analizą falową** (harmoniczną).  
Przedstawia ona sygnał przy użyciu funkcji sinusoidalnych.

Ta metoda jest użyteczna przede wszystkim do analizy **częstotliwościowej** szeregów czasowych **stacjonarnych**.

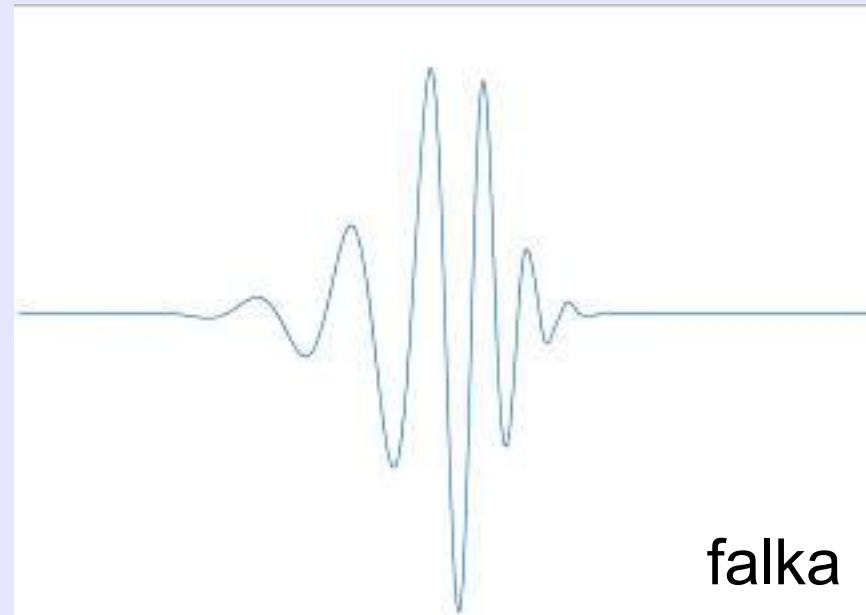
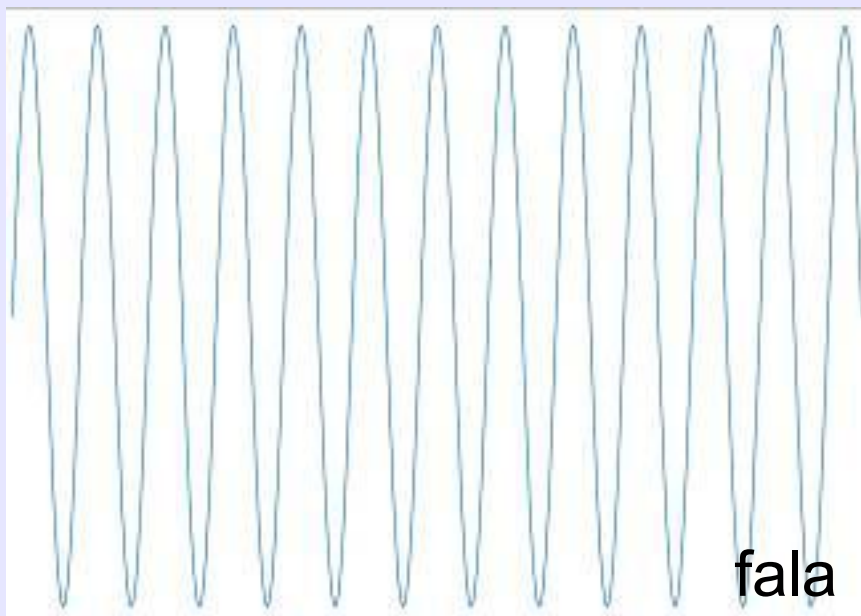
**Falki:** małe fale (z fr. les ondelettes, ang. wavelets) o energii skoncentrowanej w stosunkowo krótkim przedziale czasowym.

Analiza falkowa polega na dekompozycji sygnału przy użyciu falek otrzymanych poprzez translację i dylatację falki podstawowej ('mother wavelet').

Falki są szczególnie przydatne do analiz czasowo-częstotliwościowych szeregów niestacjonarnych.

Transformacja falkowa jest przekształceniem podobnym do transformacji Fouriera. Oba przekształcenia opierają się na wykorzystaniu operacji iloczynu skalarnego badanego sygnału  $s(t)$  i pozostałej części, zwanej "jądrem przekształcenia".

Główna różnica między tymi przekształceniami to właśnie owe jądro.



Transformacja Fouriera jako jądro wykorzystuje funkcje **sinusoidalne** (czyli funkcje okresowe reprezentujące jedną częstotliwość).

Natomiast w przypadku transformacji falkowej jądrem jest **falka** – specjalna funkcja ograniczona pewnymi wymogami, które musi spełniać aby można było ją wykorzystać do tak zwanej analizy wielorozdzielczej (np. musi posiadać funkcję skalującą).

Takich funkcji istnieje nieskończenie wiele, zatem istnieje nieskończenie wiele transformacji falkowych.



Transformacja falkowa nadaje się do analizy sygnałów niestacjonarnych, ponieważ dostarcza informacji czasowoczęstotliwościowej.

Często, wymiennie wykorzystuje się ją z transformacją Fouriera. Powodem tego jest fakt, iż jako wynik transformacji falkowej otrzymamy informację o częstotliwościach poszczególnych składników widmowych sygnału tylko ze skończoną precyzją.

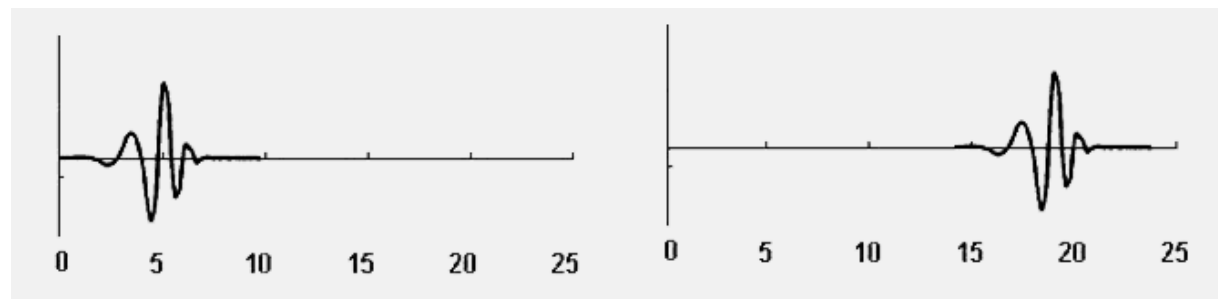
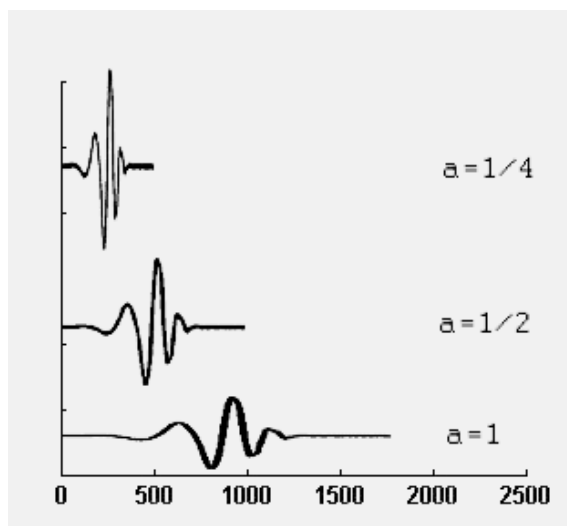
Dzieje się tak dlatego, że jądro przekształcenia (czyli funkcja) **nie reprezentuje nieskończenie wąskiego przedziału częstotliwości** lecz przedział częstotliwości o szerokości odwrotnie proporcjonalnej do czasu trwania falki

Transformację falkową stosuje się więc w przypadkach, gdy oprócz informacji o częstotliwościach składowych widmowych sygnału potrzebna jest **informacja o ich lokalizacji w czasie**.

Falki to rodziny funkcji zbioru liczb rzeczywistych na zbiór liczb rzeczywistych, z których każda jest wyprowadzona z funkcji-matki za pomocą przesunięcia i skalowania:

$$\Psi_{s,x}(t) = \Psi(2s * t + x)$$

gdzie:  $s, x$  - liczby całkowite,  $\Psi$  - funkcja-matka,  $\Psi_{s,x}$  - falka o skali  $s$  i przesunięciu  $x$ , które dążą do zera (lub po prostu wynoszą zero poza pewnym przedziałem) dla argumentu dążącego do nieskończoności.

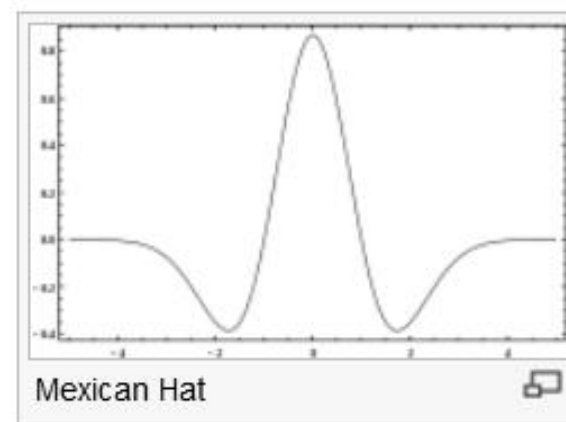
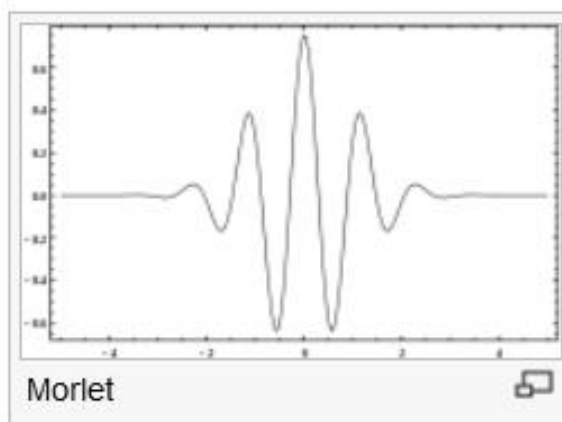
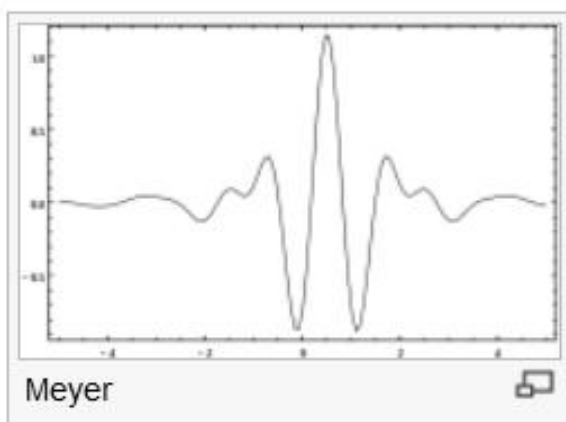


[wikipedia]

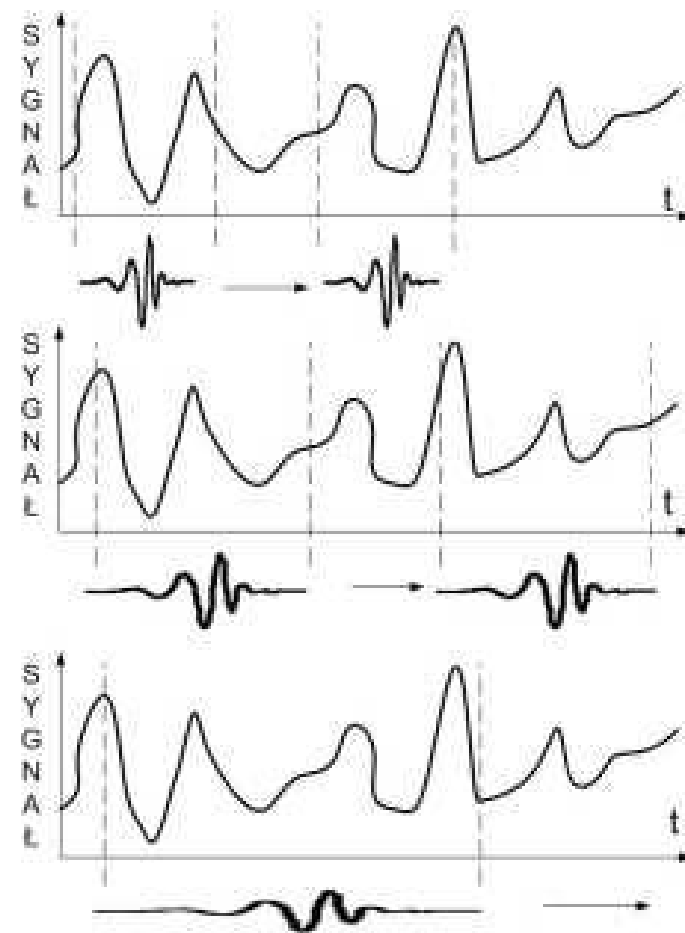
$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \quad s \neq 0.$$

$\int \psi(t) dt = 0$  warunek dot. funkcji matki; przynajmniej kilka oscylacji

$f = \sum_{m,n \in \mathbb{C}} c_{m,n}(f) \psi_{m,n}$  dekompozycja funkcji  $f$  za pomocą funkcji bazowej

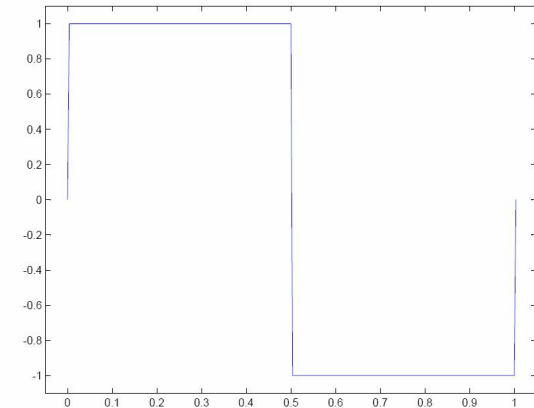


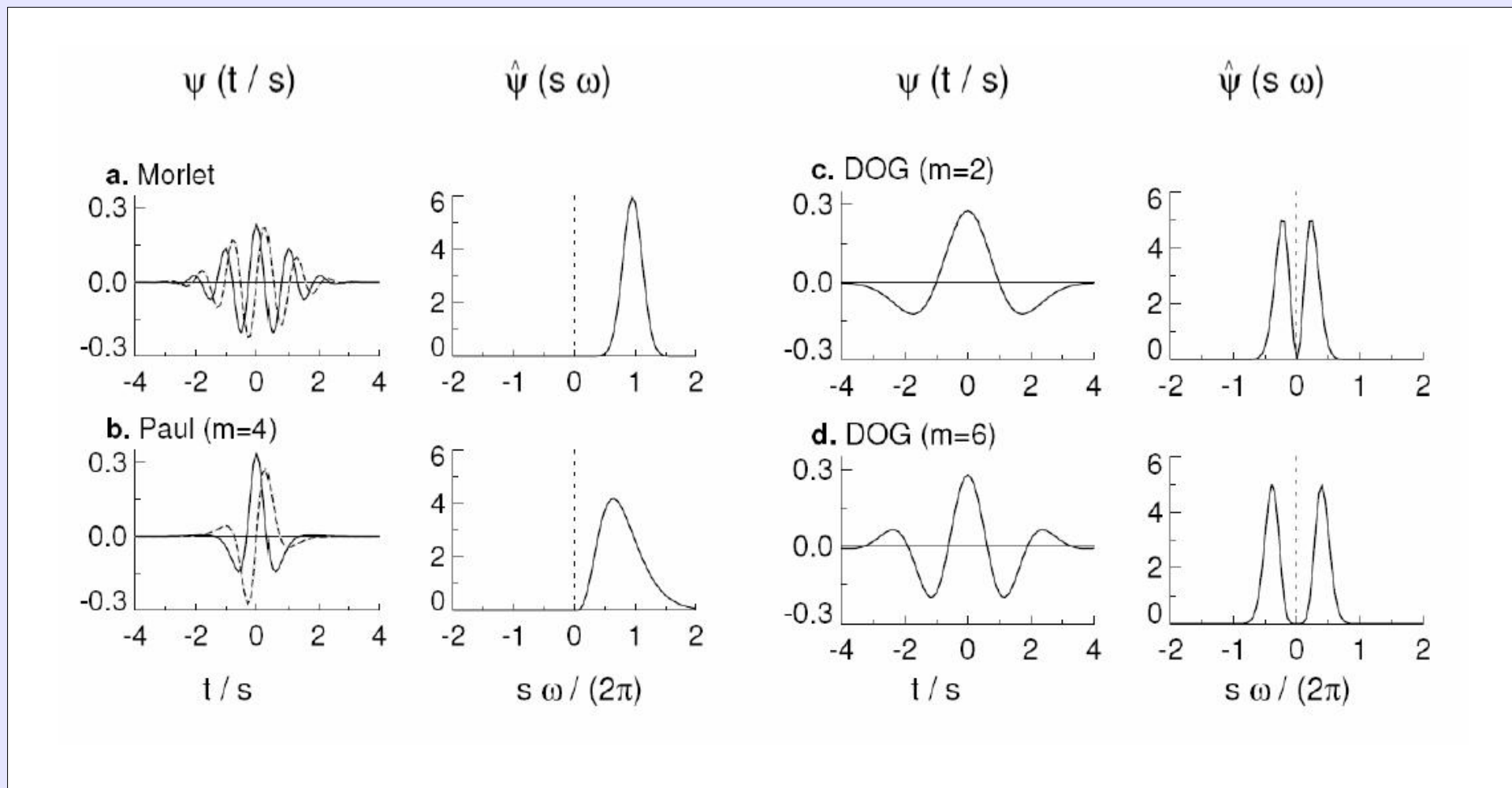
Suma ważona funkcji  $\Psi_{s,x}$  umożliwia przedstawienie z dowolną dokładnością dowolnej funkcji ciągłej, podobnie jak funkcje cosinus o różnych okresach i przesunięciach umożliwiają przedstawienie z dowolną dokładnością każdej funkcji okresowej.



*(ważne pojęcia: przestrzeń Hilberta, transformata Fouriera, przestrzeń liniowa).*

- zerowa wartość średnia  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$
- normalizacja  $\|\psi\| = 1$
- skupiona wokół  $t=0$
- skończone pasmo przenoszenia





- **przesunięcie**  $u$  i **skalowanie**  $s$  falki bazowej (ang. mother wavelet)

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t - u}{s} \right)$$



- **normalizacja**

$$\|\psi_{u,s}\| = 1$$



Ciągła TF (ang. Continuous (Integral) Wavelet Transform, CWT (IWT))

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt$$

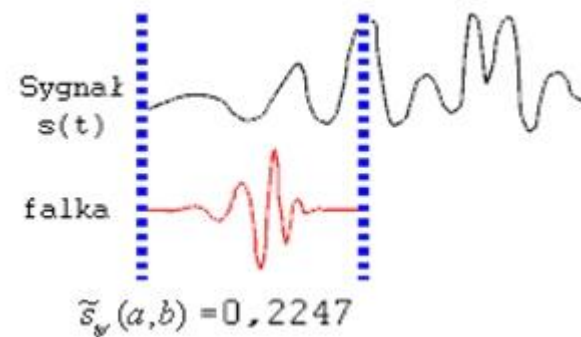
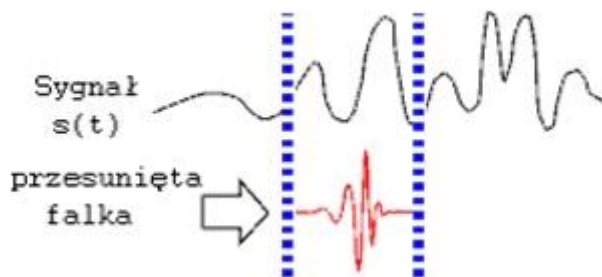
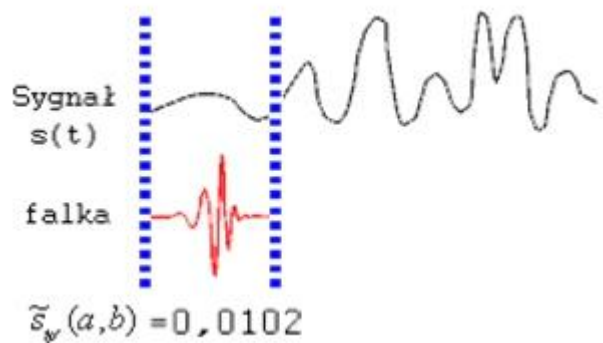
Jest miarą zmienności funkcji  $f(t)$  w otoczeniu  $u$  o rozmiarze proporcjonalnym do  $s$

**Wynikiem ciągłej transformaty falkowej są współczynniki określające podobieństwo pomiędzy daną falką a sygnałem.**



Wynikiem transformacji falkowej są współczynniki, których wartości są zależne od parametrów  $a$  i  $b$  oraz sygnału badanego  $s(t)$ .

Dla danych wartości  $a$  i  $b$  współczynnik jest miarą podobieństwa pomiędzy daną falką a wybranym fragmentem sygnału  $s(t)$ .



[wikipedia]

## Odwrotna TF

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}$$

warunek dopuszczalności  
ang. admissibility condition

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

falka nie może mieć składowej stałej  $\hat{\psi}(0) = 0$

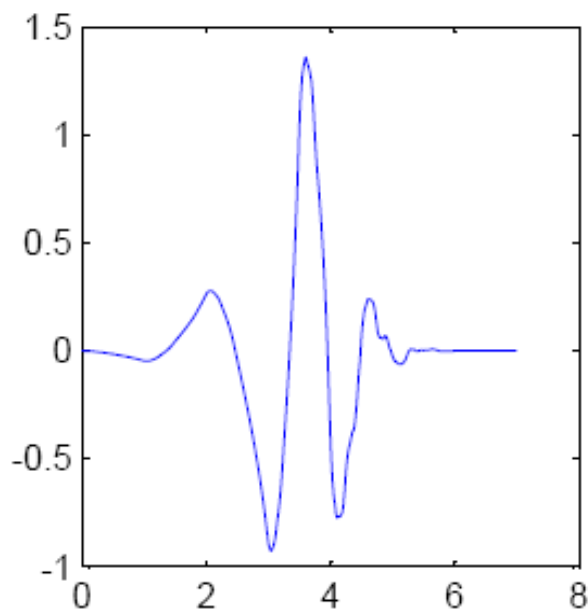
falka musi być różniczkowalna w sposób ciągły  $\hat{\psi}(\omega)$

*Calderon, Grossmann, Morlet*

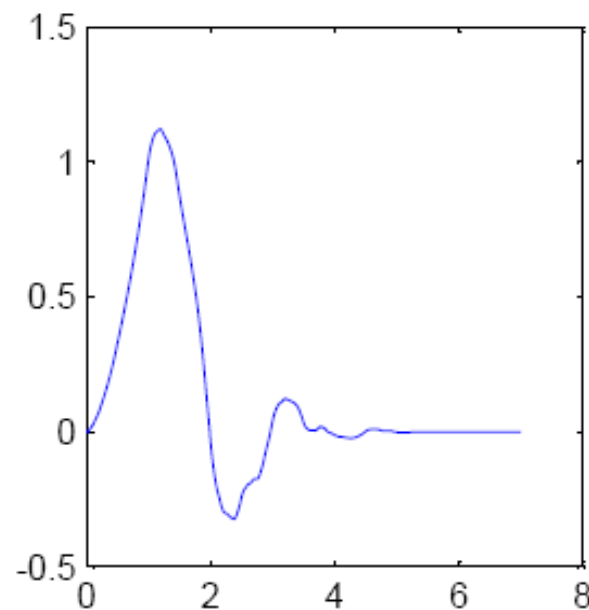
- przyjęcie granicznej wartości współczynnika skali  $s=s_0$ ,
- jeśli  $Wf(u,s)$  jest znane tylko dla wartości  $s<s_0$  to do odtworzenia oryginalnej funkcji  $f(t)$  konieczna jest informacja o  $Wf(u,s)$  dla  $s>s_0$ ,
- w tym celu wprowadza się funkcję skalującą (ang. scaling function) i tworzy rodzinę funkcji skalujących (funkcja bazowa funkcji skalującej bywa nazywana po angielsku father wavelet),
- funkcja skalująca jest „połączeniem” wszystkich falek o współczynniku skali  $s>s_0$

**Każda falka posiada swoją unikalną funkcję skalującą.** Najważniejszą cechą, która odróżnia funkcję skalującą od falki jest **niezerowa wartość średnia**.

Wartość średnia różna od zera  $\|\phi\| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |\hat{\phi}(\omega)|^2 = C_\psi$



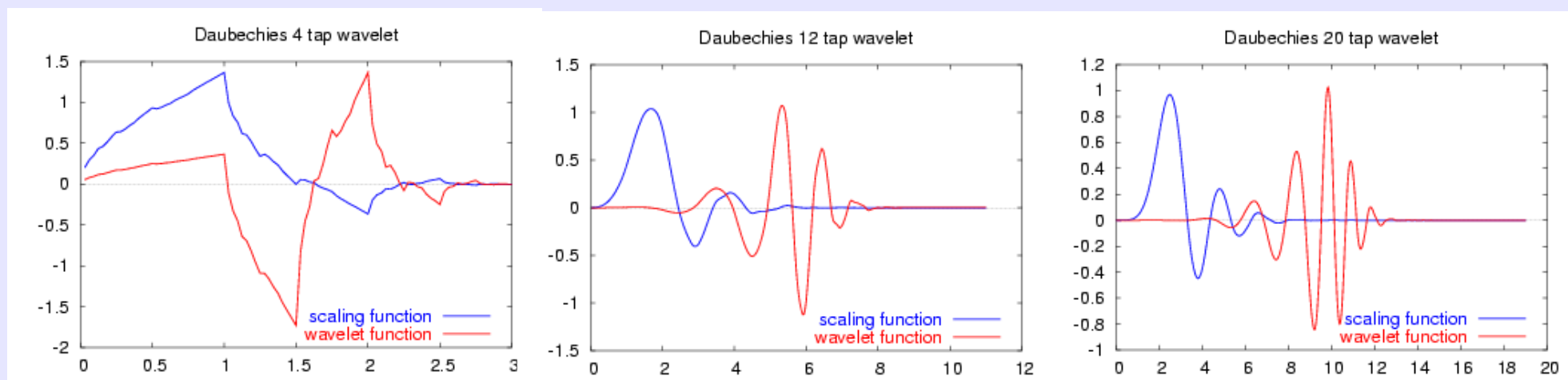
falka



funkcja skalująca



# Funkcja skalująca : przykłady



Jeśli ciągłe skalowanie  $s$  i przesunięcie  $u$  zastąpi się dyskretnym otrzyma się dyskretną rodzinę falek ( $j, k$  – liczby całkowite)

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \Psi \left( \frac{t - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j} \right)$$

Zwykle przyjmuje się  $s_0 = 2$  oraz  $\tau_0 = 1$ , co daje diadyczne próbkowanie i obliczenia prowadzi się oktawę po oktawie

zatem rodzinę falek otrzymujemy przez skalowanie  $j$  i przesunięcie  $k$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

Sygnal może zostać przedstawiony jako **suma** funkcji skalujących i falek, tworzących rodzinę funkcji ortogonalnych.

$$f(t) = \sum_k c_j(k) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

$$c_j(k) = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle$$

$$d_j(k) = \langle f(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle$$

$$s_{m+1}(t) = \sum_n c_{m+1,n} \varphi_{m+1,n}(t)$$

$$c_{m,n} = \sum_k h_{k-2n} c_{m+1,k}$$

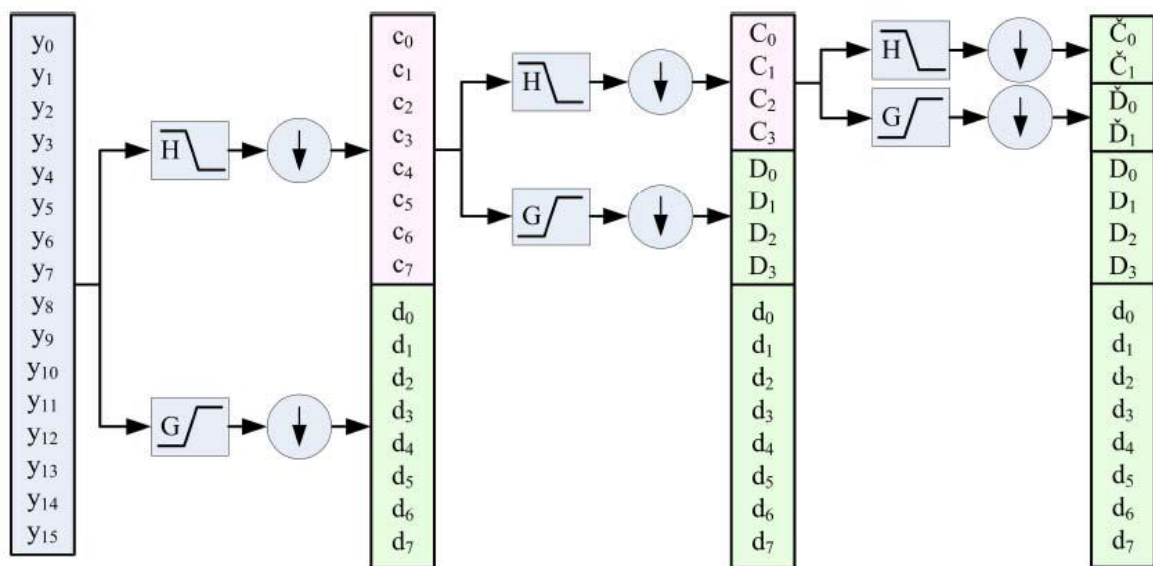
$$d_{m,n} = \sum_k g_{k-2n} c_{m+1,k}$$

$$\text{DWT} = \left\{ \left\{ d_{m,n} \right\}_n, \left\{ d_{m-1,n} \right\}_n, \dots, \left\{ d_{m-M,n} \right\}_n, \left\{ c_{m-M,n} \right\}_n \right\}$$

Mallat podał zależności między kolejnymi współczynnikami rozkładu:

$$c_j(k) = \sum_m h(m - 2k)c_{j+1}(m) \quad d_j(k) = \sum_m g(m - 2k)d_{j+1}(m)$$

$h$  – współczynniki filtra dolnoprzepustowego skalującego  $H$ ,  
 $g$  – współczynniki filtra górnoprzepustowego falkowego  $G$ .



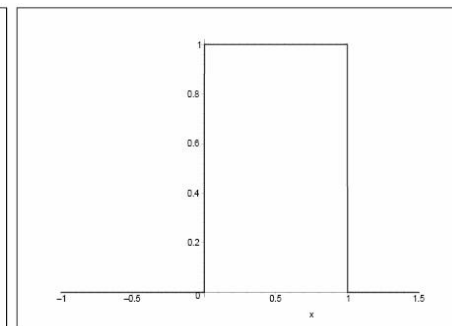
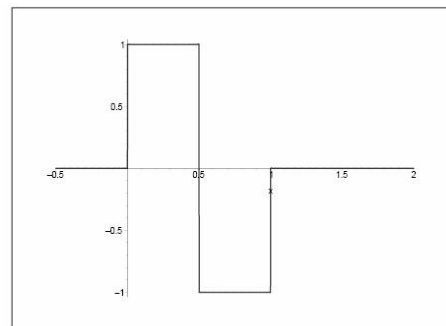
na wyjściu filtra  $H$  otrzymujemy uśrednioną, wygładzoną informację o sygnale wejściowym, na wyjściu filtra  $G$  – szczegóły sygnалу.

- Rozmiar analizowanego sygnału czy funkcji musi mieć rozmiar  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- Powstały metody dopasowujące rozmiar sygnału, przez dodanie informacji na jego krańcach.



Rozwinięcie w szereg Fouriera nie daje informacji o zachowaniu się takiej funkcji, a także nie daje dobrej aproksymacji w otoczeniu punktu  $x=0$ .

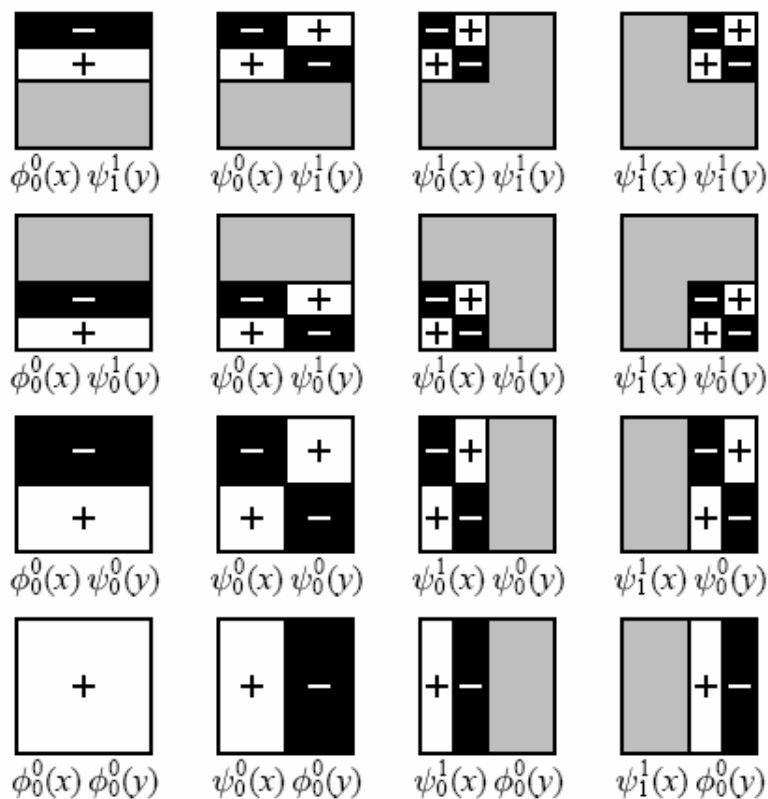
$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \pi/2, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$



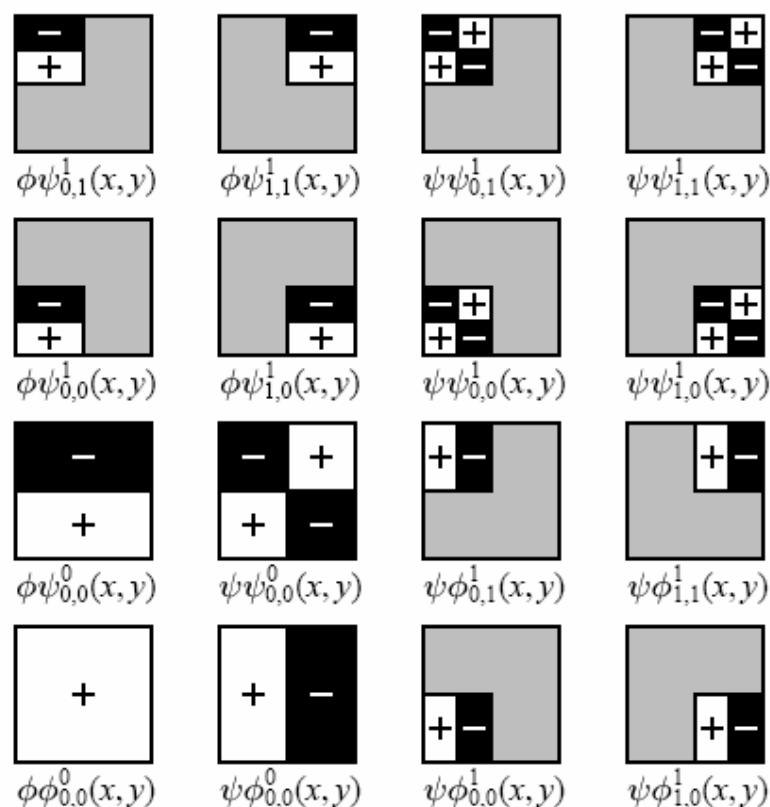
Falka Haara  $\psi^H$  i funkcja skalująca  $\varphi^H$

W 1910 r. Haar podaje nowy system ortogonalny, oparty na funkcji zdefiniowanej w przedziale  $[0,1]$ :

$$H(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



**Figure 7** Standard construction of a two-dimensional Haar wavelet basis for  $V^2$ . In the unnormalized case, functions are +1 where plus signs appear, -1 where minus signs appear, and 0 in gray regions.



**Figure 8** Nonstandard construction of a two-dimensional Haar wavelet basis for  $V^2$ .

wejście: **9 7 3 5**

1. uśrednianie parami: **8 4**

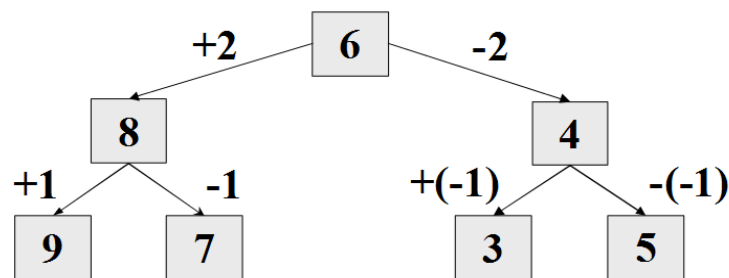
2. współczynniki transformaty: **1 -1**, ponieważ

$$8+1 = 9 \text{ (pierwszy el.)}$$

$$8-1 = 7 \text{ (drugi el.)}$$

$$4+(-1) = 3 \text{ (trzeci el.)}$$

$$4-(-1) = 5 \text{ (czwarty el.)}$$



Rozdzielczość	Średnia	Współczynniki
4	9 7 3 5	
2	8 4	1 -1
1	6	2

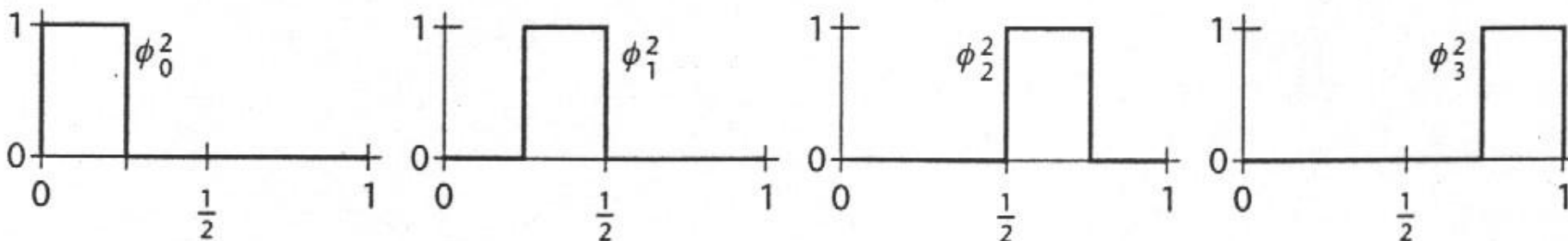
**Jednowymiarowa transformata falkowa Haara dla przedstawionego przykładu: **6 2 1 -1****

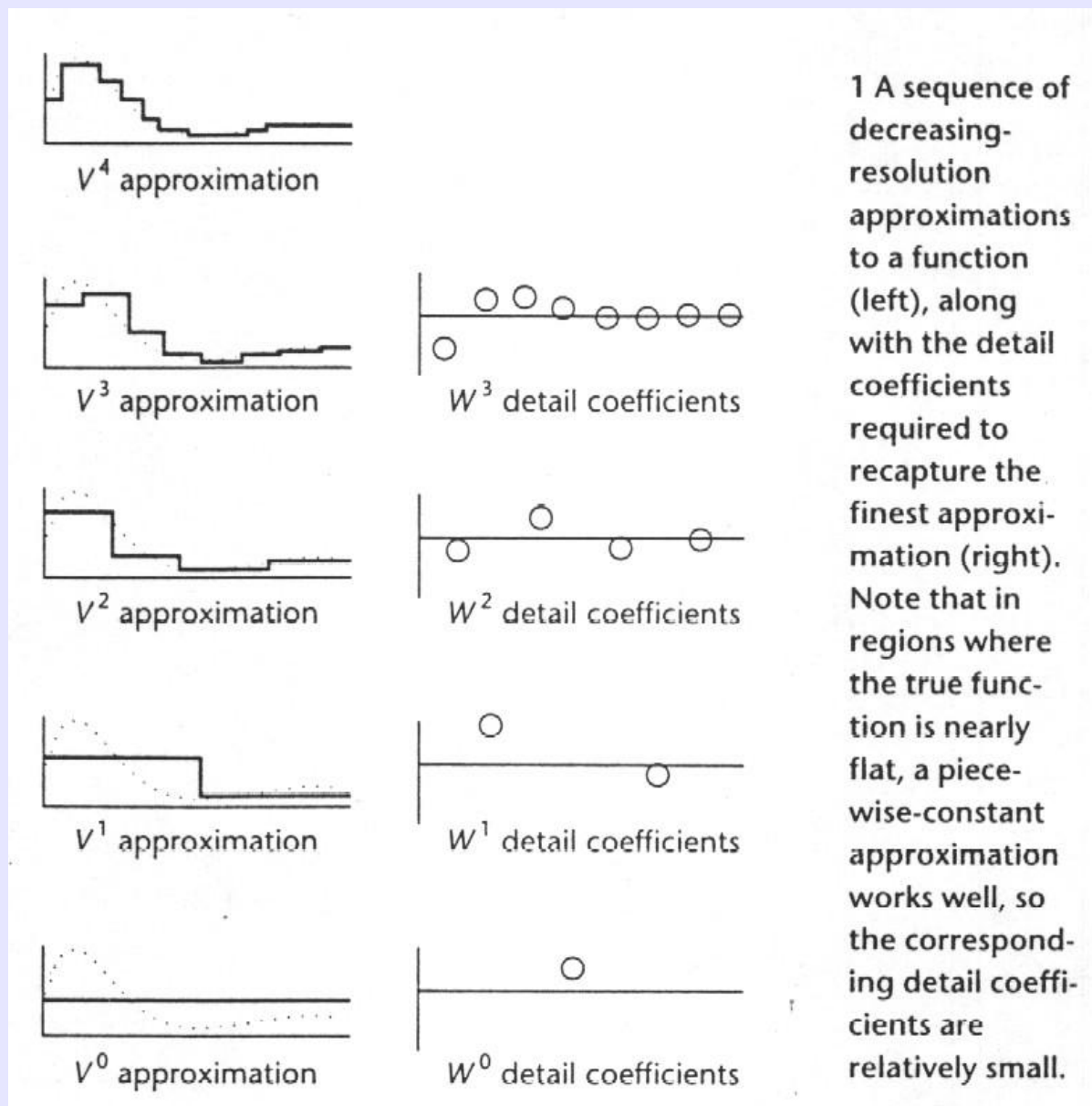
$$\phi_i^j(x) := \phi(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1$$

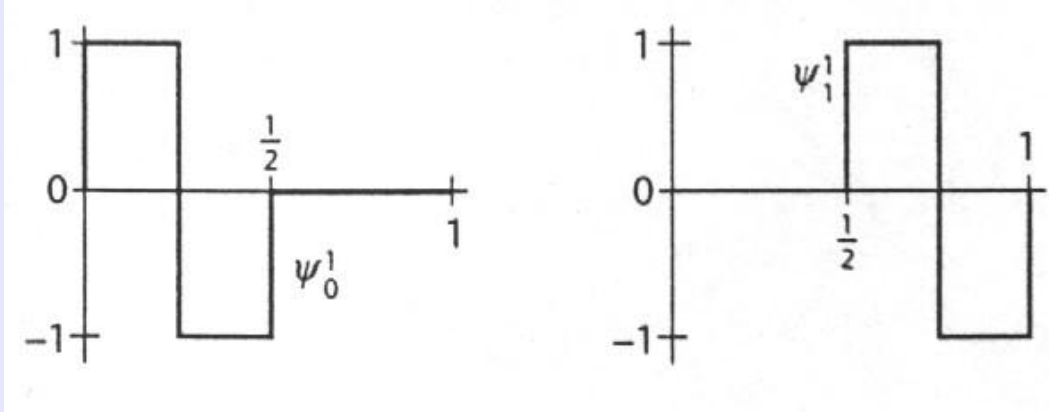
where

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2 The box basis for  $V^2$ .







$$\psi_i^j(x) := \psi(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1$$

where

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{for } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

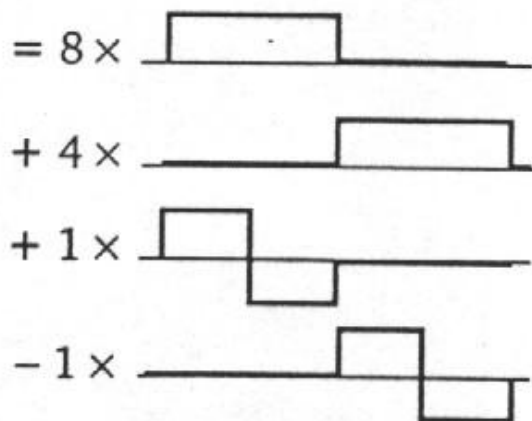
$$I(x) = c_0^2 \phi_0^2(x) + c_1^2 \phi_1^2(x) + c_2^2 \phi_2^2(x) + c_3^2 \phi_3^2(x).$$

A more graphical representation is

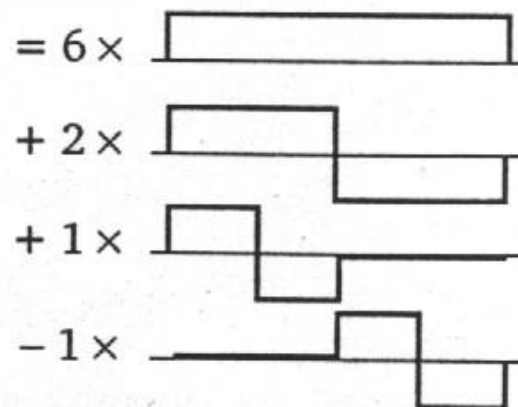
$$\begin{aligned} I(x) = & 9 \times \text{[rectangle from } x=0 \text{ to } x=1/2 \text{ with height 9]} \\ & + 7 \times \text{[rectangle from } x=1/2 \text{ to } x=3/4 \text{ with height 7]} \\ & + 3 \times \text{[rectangle from } x=3/4 \text{ to } x=7/8 \text{ with height 3]} \\ & + 5 \times \text{[rectangle from } x=7/8 \text{ to } x=1 \text{ with height 5]} \end{aligned}$$



$$I(x) = c_0^1 \phi_0^1(x) + c_1^1 \phi_1^1(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$



$$I(x) = c_0^0 \phi_0^0(x) + d_0^0 \psi_0^0(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x)$$

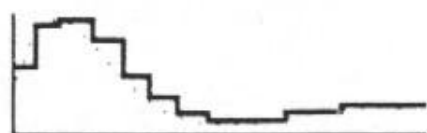




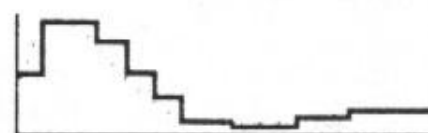
16 out of 16 coefficients



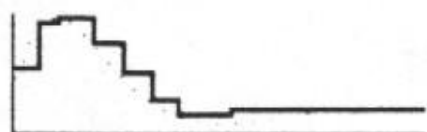
14 out of 16 coefficients



12 out of 16 coefficients



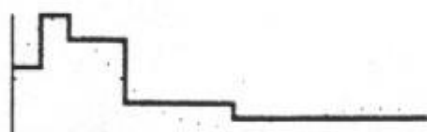
10 out of 16 coefficients



8 out of 16 coefficients



6 out of 16 coefficients



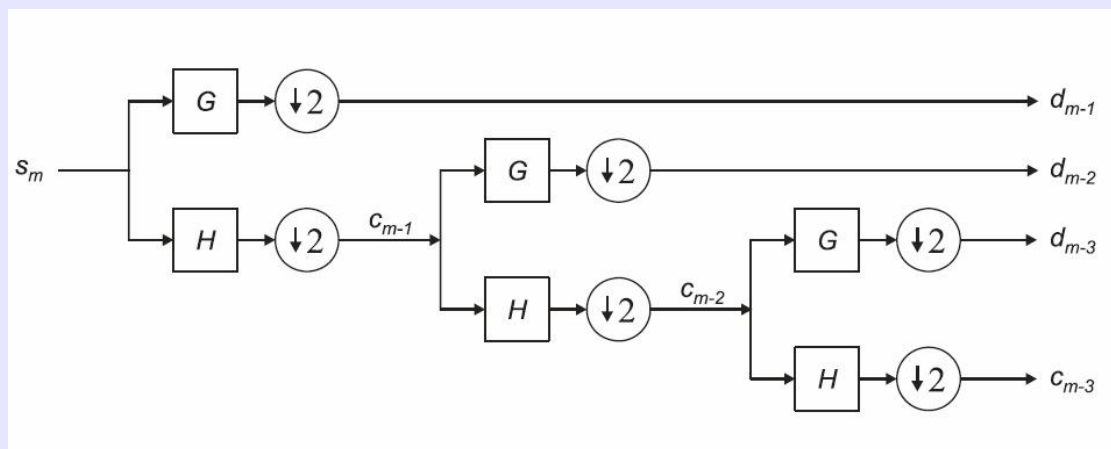
4 out of 16 coefficients



2 out of 16 coefficients

4 Coarse approximations to a function obtained using  $L_2$  compression: detail coefficients are removed in order of increasing magnitude.



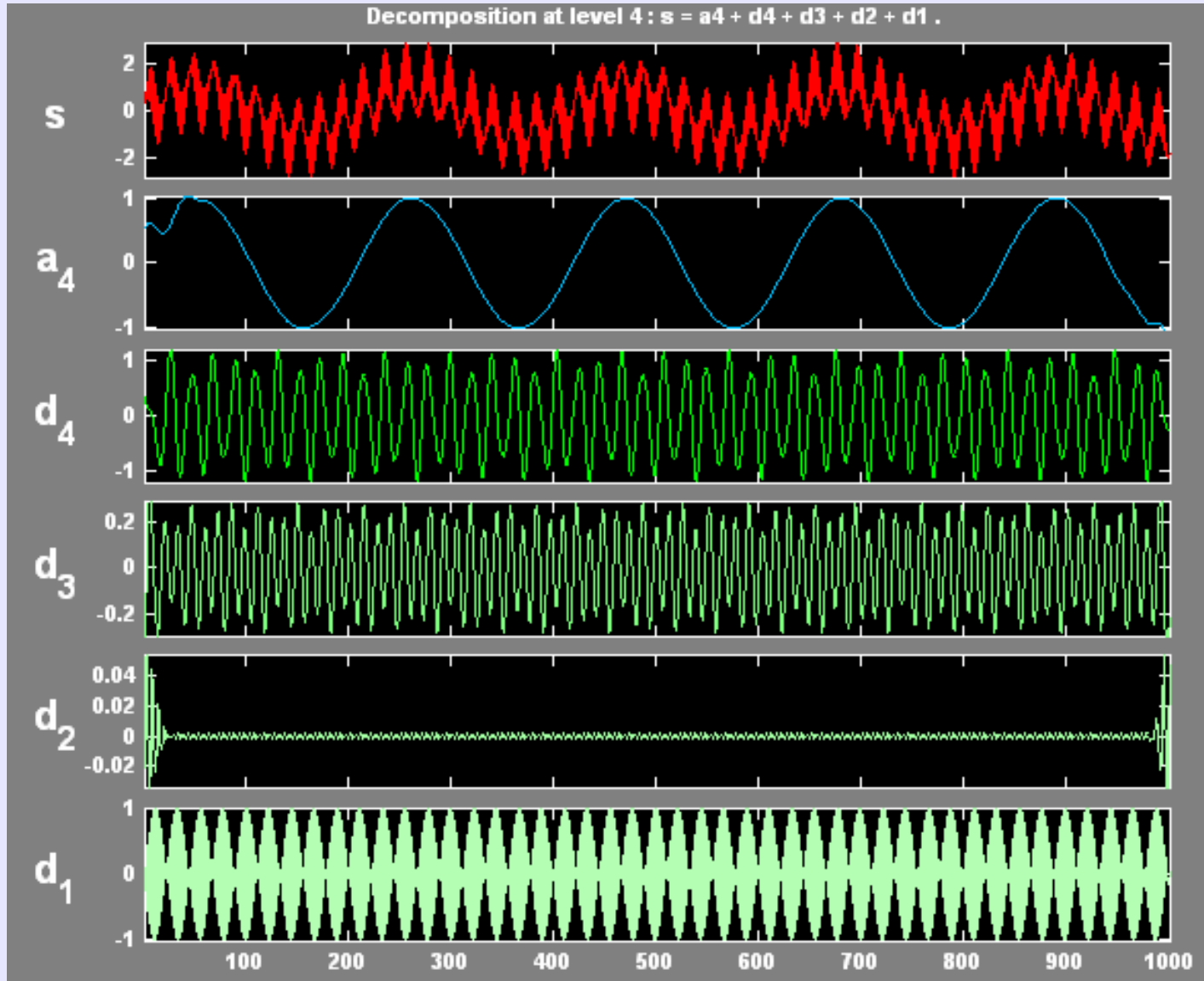


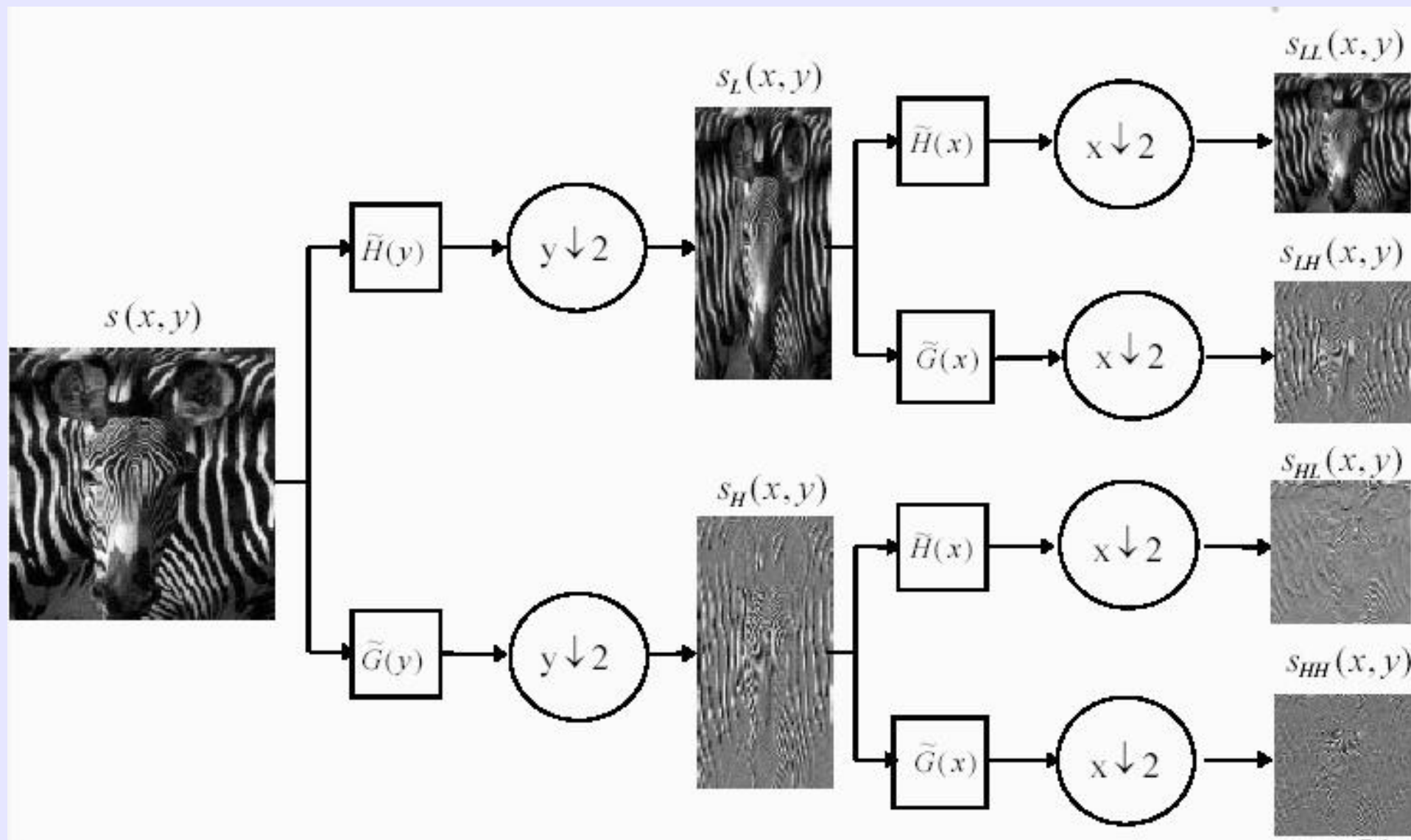
```

procedure DecompositionStep(C: array [1..h] of reals)
    for i ← 1 to h/2 do
         $C'[i] \leftarrow (C[2i - 1] + C[2i])/\sqrt{2}$ 
         $C'[h/2 + i] \leftarrow (C[2i - 1] - C[2i])/\sqrt{2}$ 
    end for
    C ← C'
end procedure
    
```

```

procedure Decomposition(C: array [1..h] of reals)
    C ← C/√h (normalize input coefficients)
    while h > 1 do
        DecompositionStep(C[1..h])
        h ← h/2
    end while
end procedure
    
```







# Dekompozycja obrazu

... ZAAWANSOWANE METODY PRZETWARZANIA OBRAZÓW ...



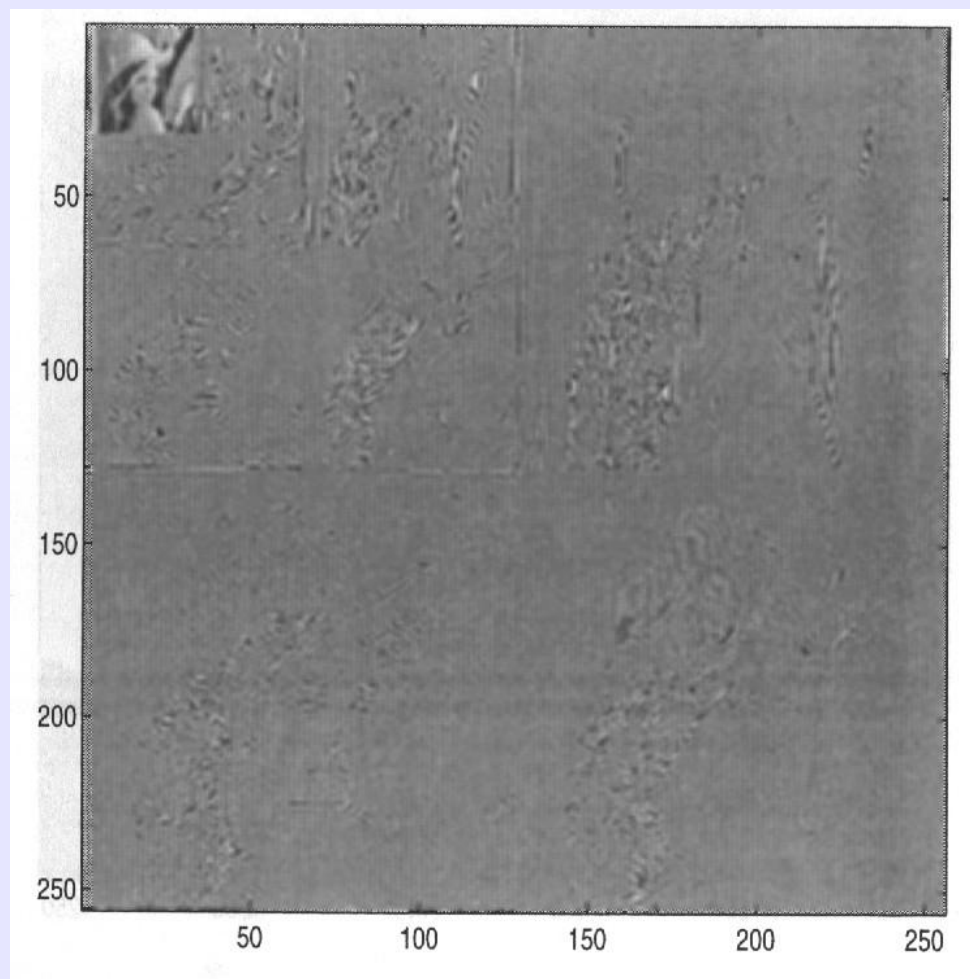
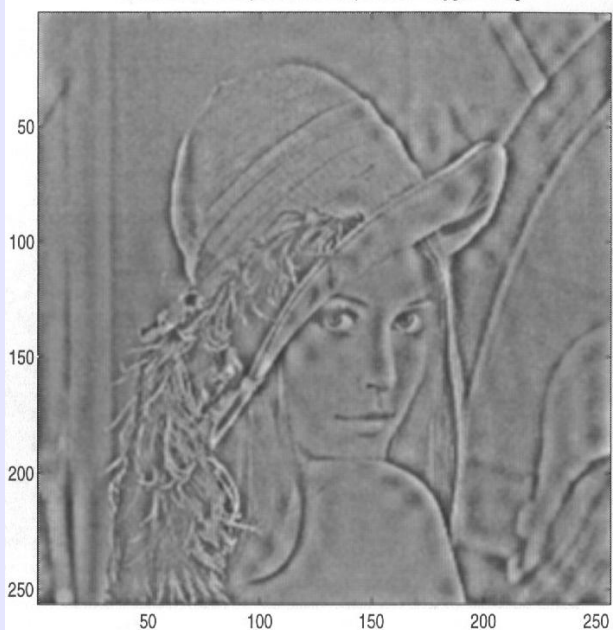
OBRAZ	LOW-LOW (A1)	LOW-HIGH (D1a)	L-L (A2)	L-H (D2a)	LOW-HIGH (D1a)
			H-L (D2b)	H-H (D2c)	
	HIGH-LOW (D1b)	HIGH-HIGH (D1c)	HIGH-LOW (D1b)	HIGH-HIGH (D1c)	



Lena – obraz oryginalny



Lena – rekonstrukcja z transf. bez podobrazu wygładzonego



- próby detekcji fal grawitacyjnych (CWT),
- badanie aktywności Słońca i plam na Słońcu (CWT),
- JPEG2000,
- cyfrowe znaki wodne,
- automatyczne monitorowanie ruchu statków na podstawie obrazów satelitarnych,
- charakterystyka obrazów (van Gogh, Picasso, Monet, Klee i in.),
- analiza danych sejsmicznych (CWT i DWT),
- rozwiązywanie równań różniczkowych i całkowych,
- filtracja obrazów radarowych (SAR, Synthetic Aperture Radar),

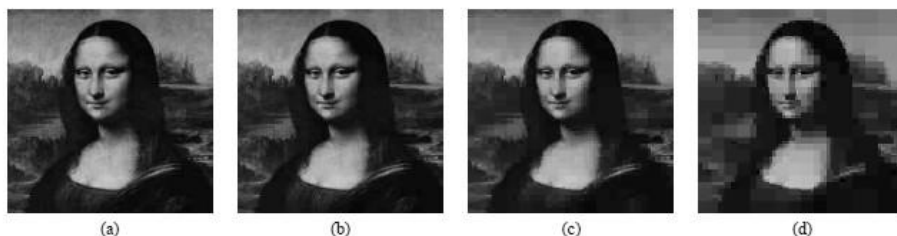
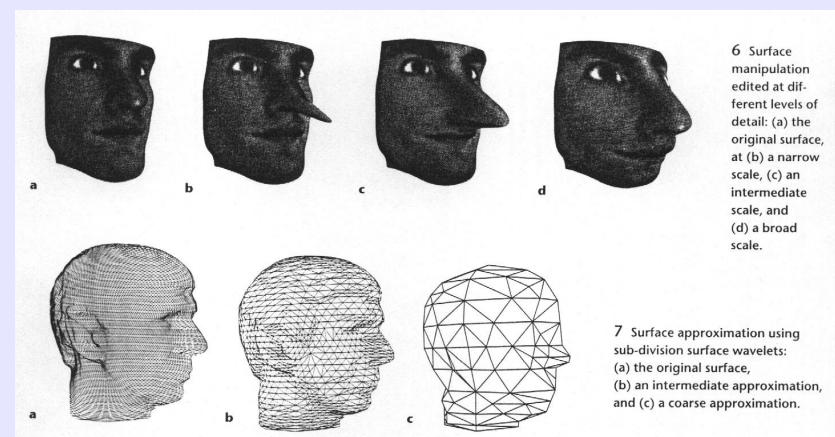
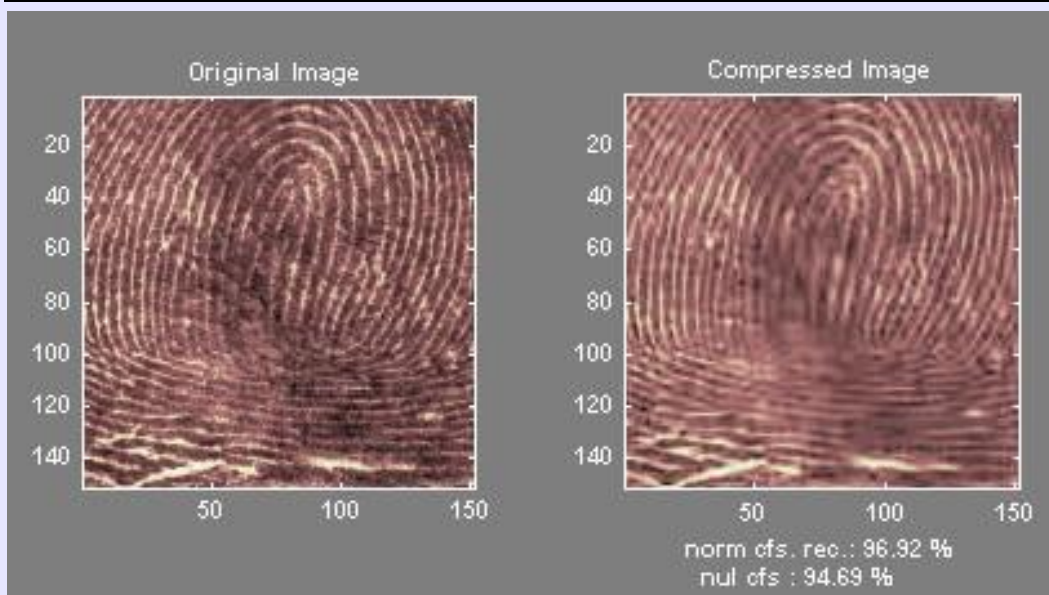
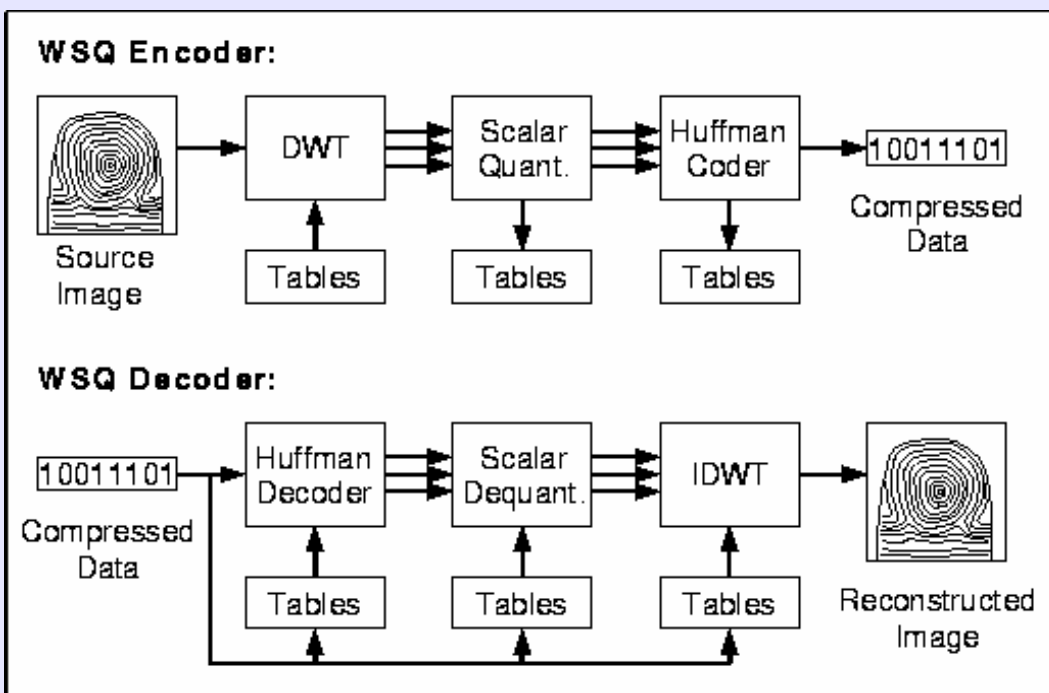


Figure 9  $L^2$  wavelet image compression: The original image (a) can be represented using (b) 19% of its wavelet coefficients, with 5% relative  $L^2$  error; (c) 3% of its coefficients, with 10% relative  $L^2$  error; and (d) 1% of its coefficients, with 15% relative  $L^2$  error.



6 Surface manipulation edited at different levels of detail: (a) the original surface, at (b) a narrow scale, (c) an intermediate scale, and (d) a broad scale.

7 Surface approximation using sub-division surface wavers: (a) the original surface, (b) an intermediate approximation, and (c) a coarse approximation.

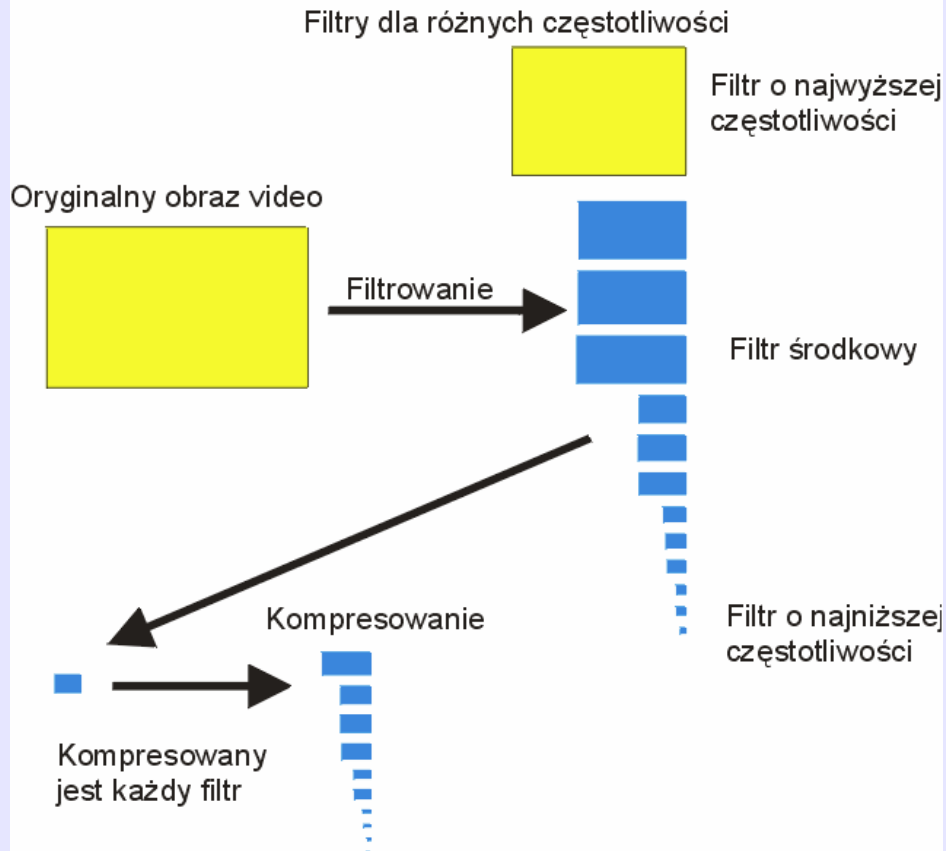


Na etapie DWT, obraz dzielony jest na 64 pasma częstotliwościowe za pomocą transformaty falkowej 2D, która jest zastosowana w sposób kaskadowy (iteracyjny).

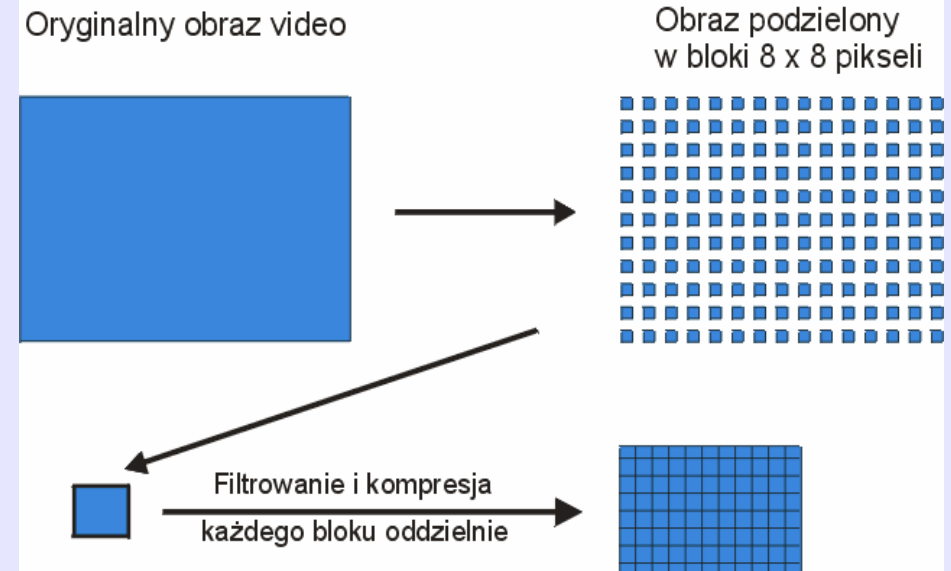
Dane z DWT (float/double) są obcinane/kwantowane poprzez jednokierunkową funkcję (tutaj następuje kompresja stratna).

Na ostatnim etapie otrzymane dane są kodowane za pomocą np. metody Huffmana (kodowanie entropijne) w celu zmniejszenia wielkości  
**ilość\_bitów/piksel**

## Schemat kompresji Wavelet



## Schemat kompresji DCT







JPEG image;  
file size 45853 bytes,  
compression ratio 12.9.

WSQ image;  
file size 45621 bytes,  
compression ratio 12.9.

